Interrogation n°8 – Corrigé (sujet A)

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application φ définie pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Corrigé

- Montrons que φ est symétrique. Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\varphi(Q,P) = \sum_{k=0}^{n} Q(k)P(k) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) = \varphi(P,Q)$$

- Montrons que φ est bilinéaire. Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha P_1 + \beta P_2, Q) &= \sum_{k=0}^{n} [\alpha P_1 + \beta P_2](k) Q(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} [\alpha P_1(k) + \beta P_2(k)] Q(k) \\
&= \alpha \sum_{k=0}^{n} P_1(k)Q(k) + \beta \sum_{k=0}^{n} P_2(k)Q(k) \\
&= \alpha \varphi(P_1, Q) + \beta \varphi(P_2, Q)
\end{aligned}$$

  Ainsi, φ est linéaire en sa première variable et par symétrie, φ est bilinéaire.

- Montrons que φ est positive. On a $\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geq 0$ car P est un polynôme réel.

- Montrons que φ est définie. On suppose que $\varphi(P,P) = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0$. Or, c'est une somme de termes positifs : si la somme est nulle, chaque terme est nul. Ainsi,

$$P(0)^2 = \ldots = P(n)^2 = 0 \qquad \text{donc} \qquad P(0) = \ldots = P(n) = 0$$

  Cela entraine que P admet $n+1$ racines réelles. Comme P est de degré n, on en déduit que $P = 0$.

Finalement, φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. On suppose que

$$\forall x, y \in E \qquad (f(x) \mid y) = (x \mid f(y))$$

où $(u \mid v)$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E.

1) Montrer que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$.
2) En déduire que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$.

Corrigé

1) Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$. Montrons que $y \in \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$. Soit $u \in \operatorname{Ker}(f)$. Il suffit de montrer que $(y \mid u) = 0$. Comme $y \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc

$$\begin{aligned} (y \mid u) &= (f(x) \mid u) \\ &= (x \mid f(u)) \qquad \text{par l'hypothèse sur } f \\ &= (x \mid 0_E) \qquad \text{car } u \in \operatorname{Ker}(f) \\ &= 0_E \end{aligned}$$

Donc $y \in \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$. D'où $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f)^{\perp}$ par arbitraire sur y.

2) On a déjà une inclusion par la question précédente. Pour conclure, il suffit de montrer que $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim\left(\operatorname{Ker}(f)^{\perp}\right)$. Or, d'une part, par le théorème du rang, on a

$$\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker}(f))$$

et d'autre part, on a aussi, puisque E est euclidien :

$$\dim\left(\operatorname{Ker}(f)^{\perp}\right) = \dim E - \dim(\operatorname{Ker}(f))$$

D'où les deux dimensions sont bien égales et on conclut à l'égalité.

Exercice 3. Soit E un espace préhilbertien réel et $f : E \to E$ une application quelconque (pas nécessairement linéaire). On suppose que

$$\forall x, y \in E \qquad (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$$

où $(u \mid v)$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E.

1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$, le vecteur $f(\lambda x) - \lambda f(x)$ est nul. On pourra utiliser la norme euclidienne.
2) Montrer que f est linéaire.

Corrigé

1) On a

$$\begin{aligned}\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\|^2 &= \|f(\lambda x)\|^2 - 2(f(\lambda x) \mid \lambda f(x)) + \|\lambda f(x)\|^2 \\ &= (f(\lambda x) \mid f(\lambda x)) - 2\lambda (f(\lambda x) \mid f(x)) + (\lambda f(x) \mid \lambda f(x)) \\ &= (\lambda x \mid \lambda x) - 2\lambda (\lambda x \mid x) + \lambda^2 (f(x) \mid f(x)) \\ &= \lambda^2 (x \mid x) - 2\lambda^2 (x \mid x) + \lambda^2 (x \mid x) \\ &= 0_E\end{aligned}$$

Ainsi, $f(\lambda x) - \lambda f(x) = 0_E$.

2) Soit $x, y \in E$. D'après la question précédente, il suffit de montrer que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On s'inspire de la question précédente :

$$\|f(x+y) - [f(x) + f(y)]\|^2 = \|f(x+y)\|^2 - 2\,(f(x+y) \mid f(x) + f(y)) + \|f(x) + f(y)\|^2$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\|f(x+y)\|^2 &= (f(x+y) \mid f(x+y)) \\ &= (x+y \mid x+y) \\ &= (x+y \mid x) + (x+y \mid y) \\ &= (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|f(x) + f(y)\|^2 &= (f(x) + f(y) \mid f(x) + f(y)) \\ &= (f(x) \mid f(x)) + 2(f(x) \mid f(y)) + (f(y) \mid f(y)) \\ &= (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y)\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}(f(x+y) \mid f(x) + f(y)) &= (f(x+y) \mid f(x)) + (f(x+y) \mid f(y)) \\ &= (x+y \mid x) + (x+y \mid y) \\ &= (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y)\end{aligned}$$

Ainsi, ces trois quantités sont toutes égales, de sorte que si on note M cette valeur, alors

$$\|f(x+y) - [f(x) + f(y)]\|^2 = M - 2M + M = 0$$

Ainsi, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Interrogation n°8 – Corrigé (sujet B)

Exercice 1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle A \mid B \rangle = \operatorname{Tr}\left(A^\top B\right)$$

1) En explicitant $\left[A^\top B\right]_{ij}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, vérifier que pour toutes matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$\langle A \mid B \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{i,j} B_{i,j}$$

2) Montrer que $(A, B) \mapsto \langle A \mid B \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note H le s.e.v. des matrices de trace nulle.

3) Justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4) Montrer que $\operatorname{Vect}(I_n) \subset H^\perp$.
5) En déduire que $H^\perp = \operatorname{Vect}(I_n)$.
6) On note U la matrice dont tous les coefficients valent 1. Décomposer U en la somme d'une matrice de H et d'une matrice de $H^\perp$.
7) En déduire la distance de la matrice U au s.e.v. H, notée $d(U, H)$.

Corrigé

1) $\left[A^\top B\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A^\top)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} B_{kj}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\langle A \mid B \rangle &= \operatorname{Tr}\left(A^\top B\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[A^\top B\right]_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ki} B_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ij} \qquad (k \text{ est devenu } i,\ i \text{ est devenu } j) \\
&= \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{i,j} B_{i,j}
\end{aligned}$$

2) Montrons la symétrie : pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle B \mid A \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} B_{i,j} A_{i,j} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{i,j} B_{i,j} = \langle A \mid B \rangle$$

Montrons la bilinéarité : pour tous $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha A_1 + \beta A_2 \mid B \rangle &= \mathrm{Tr}\left((\alpha A_1 + \beta A_2)^\top B \right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\left(\alpha A_1^\top + \beta A_2^\top \right) B \right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(\alpha A_1^\top B + \beta A_2^\top B \right) \\
&= \alpha \mathrm{Tr}\,(A_1^\top B) + \beta \mathrm{Tr}\,(A_2^\top B) \\
&= \alpha \langle A_1 \mid B \rangle + \beta \langle A_2 \mid B \rangle
\end{aligned}$$

D'où la linéarité selon la première variable. On en déduit la bilinéarité par symétrie. Montrons la positivité :

$$\langle A \mid A \rangle = \sum_{1 \leq i,j \leq n} A_{i,j}^2 \geq 0$$

et enfin, si on suppose que $\langle A \mid A \rangle = 0$, alors comme on a une somme de termes positifs qui est nulle, cela entraine que $A_{i,j}^2 = 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$. Donc $A_{i,j} = 0$, ce qui entraine que A est nulle. Finalement, l'application est bien un produit scalaire.

3) La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui est non nulle (par exemple $\mathrm{Tr}\,(I_n) = n \neq 0$). Ainsi, H est le noyau d'une forme linéaire non nulle : c'est un hyperplan.

4) Soit $M \in \mathrm{Vect}(I_n)$. Montrons que $M \in H^\perp$. Soit $A \in H$. Il faut donc montrer que $\langle M \mid A \rangle = 0$. Or, comme $M \in \mathrm{Vect}(I_n)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$. Alors

$$\langle M \mid A \rangle = \langle \lambda I_n \mid A \rangle = \lambda \langle I_n \mid A \rangle = \lambda \mathrm{Tr}\,(I_n^\top A) = \lambda \mathrm{Tr}\,(I_n A) = \lambda \mathrm{Tr}\,(A) = 0$$

car $A \in H$. Ainsi, on a bien $M \in H^\perp$. D'où $\mathrm{Vect}(I_n) \subset H^\perp$ par arbitraire sur M.

5) On a $\dim \mathrm{Vect}(I_n) = 1$ et

$$\dim H^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim H = n^2 - (n^2 - 1) = 1$$

Ainsi, on a $\dim H^\perp = \dim \mathrm{Vect}(I_n)$. Comme on a déjà montré une inclusion, ces deux s.e.v. sont égaux.

6) On pose

$$V = \begin{pmatrix} 0 & & & \text{\huge 1} \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 1} & & & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $U = I_n + V$. De plus $I_n \in \mathrm{Vect}(I_n)$ donc $I_n \in H^\perp$ par la question précédente. Par ailleurs, $V \in H$ car $\mathrm{Tr}\,(V) = 0$. Ainsi, on a obtenu la décomposition voulue :

$$U = \underbrace{I_n}_{\in H^\perp} + \underbrace{V}_{\in H}$$

7) On note p_H le projecteur orthogonal sur H. Par ce qui précède, on a $p_H(U) = V$. Ainsi, :

$$\begin{aligned}
d(U,H) &= \|U - p_H(U)\| \\
&= \|U - V\| \\
&= \|I_n\| \\
&= \sqrt{\langle I_n, I_n\rangle} \\
&= \sqrt{\operatorname{Tr}\left(I_n^\top I_n\right)} \\
&= \sqrt{\operatorname{Tr}\left(I_n\right)} \\
&= \boxed{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs tels que $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

1) Rappeler l'expression du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, qu'on notera $(\bullet \mid \bullet)$.
2) Rappeler le résultat de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire pour deux vecteurs $y, z \in \mathbb{R}^n$.
3) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $x_1, \cdots, x_n$ pour qu'on ait égalité.

Corrigé

1) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique défini pour tous $y, z \in \mathbb{R}^n$ par :

$$(y \mid z) = \sum_{k=1}^{n} y_k z_k$$

2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraine que $|(y \mid z)| \leq \|y\| \times \|z\|$ avec égalité si et seulement si (y, z) est liée.
3) En passant au carré dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient de manière équivalente :

$$(y \mid z)^2 \leq \|y\|^2 \times \|z\|^2$$

On pose $y = (\sqrt{x_1}, \cdots, \sqrt{x_n})$ et $z = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$, de sorte que

$$|(y \mid z)|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} y_k z_k\right|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} 1\right|^2 = n^2$$

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k = 1$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit :

$$n^2 \leq \|z\|^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

et on en déduit le résultat voulu. Enfin, il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, i.e. si et seulement si (y, z) est liée. Ainsi, comme y et z sont non nuls, cela revient à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} & y = \lambda z \\ \iff & \forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \sqrt{x_k} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_k}} \\ \iff & \forall k \in [\![1, n]\!] \qquad x_k = \lambda \end{aligned}$$

Cela revient à dire que les réels x_k sont tous égaux au même réel λ (strictement positif). Comme par ailleurs $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, cela revient à dire que

$$\boxed{x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}}$$